4^{η} Δεκάδα θεμάτων επανάληψης

31.

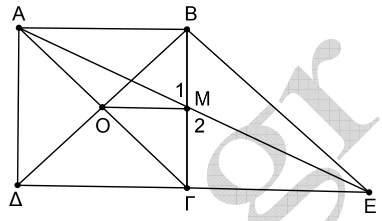
Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και Μ το μέσο του ΒΓ.
Η ΑΜ τέμνει την ΔΓ στο Ε . Δείξτε ότι

i) $\Gamma E = \Gamma\Delta$

ii) Το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές

iii) $OM = \dfrac{\Delta E}{4}$

Προτεινόμενη λύση



i)

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΕ έχουν

$BM = M\Gamma$ και $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ άρα είναι ίσα , οπότε

$\Gamma E = AB = \Delta\Gamma$

ii)

Στο τρίγωνο ΔΒΕ το ΒΓ είναι ύψος και διάμεσος άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές

επειδή επιπλέον ισχύει $B\Gamma = \Gamma\Delta = \dfrac{\Delta E}{2}$ το τρίγωνο είναι και ορθογώνιο

iii)

Τα Ο και Μ είναι μέσα των ΒΔ και ΒΓ άρα

$$OM = \frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{\frac{\Delta E}{2}}{2} = \frac{\Delta E}{4}$$

32.

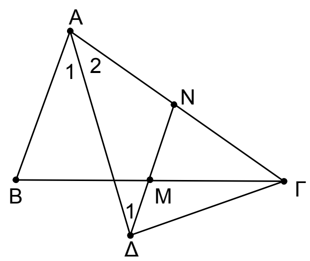
Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$, τα Μ και Ν είναι τα μέσα των ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα,
η δε ευθεία ΜΝ τέμνει την διχοτόμο της γωνίας $\widehat{A}$ στο Δ. Δείξτε ότι

i) $NA = N\Delta$

ii) $\Gamma\Delta \perp A\Delta$

iii) $A\Gamma - AB = 2\Delta M$

Προτεινόμενη λύση



i)

Τα Μ και Ν είναι μέσα των ΒΓ και ΑΓ, άρα

$MN \,//\, AB$, οπότε $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{A}_1$ (εντός εναλλάξ).

Ακόμα είναι και $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, άρα $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{A}_2$

συνεπώς $NA = N\Delta$

ii)

Στο τρίγωνο ΑΔΓ η ΔΝ είναι διάμεσος και $\Delta N = AN = \dfrac{A\Gamma}{2}$ άρα το τρίγωνο είναι

ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΑΓ

iii)

$$2\Delta M = 2(\Delta N - MN) = 2\left(\frac{A\Gamma}{2} - \frac{AB}{2}\right) = A\Gamma - AB$$

33.

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 2ΒΓ, δείξτε ότι

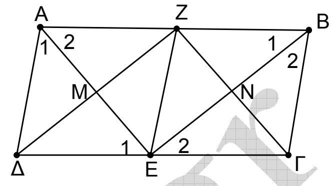
i) Οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$ τέμνονται σε σημείο Ε πάνω στην ΓΔ

ii) Αν η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Delta}$ τέμνει τη ΑΒ στο Ζ , τότε το ΑΖΕΔ είναι ρόμβος

iii) $A\hat{E}B = 90^o$

iv) Αν η ΔΖ τέμνει την ΑΕ στο Μ και η ΓΖ την ΒΕ στο Ν, τότε το ΕΜΖΝ είναι ορθογώνιο.

Προτεινόμενη λύση



i)

Έστω ότι η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$ τέμνει την ΔΓ στο Ε.
Θα αποδείξουμε ότι η ΒΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$.

Είναι $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ και $\widehat{A}_2 = \hat{E}_1$ (εντός εναλλάξ) , άρα $\widehat{A}_1 = \hat{E}_1$, οπότε ΑΔ = ΔΕ **(1)**

Από την υπόθεση ΑΒ = 2ΒΓ προκύπτει ότι $B\Gamma = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow A\Delta = \frac{\Delta\Gamma}{2}$

και λόγω της (1) , $\Delta E = \frac{\Delta\Gamma}{2} = E\Gamma = B\Gamma$

Αφού ΕΓ = ΒΓ έχουμε $\hat{E}_2 = \hat{B}_2$ και επειδή $\hat{E}_2 = \hat{B}_1$ θα είναι $\hat{B}_2 = \hat{B}_1$, δηλαδή η ΒΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$

ii)

Οι διχοτόμοι ΑΕ και ΔΖ των διαδοχικών γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι κάθετες , οπότε το τρίγωνο ΑΔΖ , αφού έχει την ΑΜ διχοτόμο και ύψος, θα είναι ισοσκελές , δηλαδή ΑΔ = ΑΖ
Αφού λοιπόν τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΔΕ είναι ισοσκελή , στο τετράπλευρο ΑΖΕΔ οι διαγώνιες είναι κάθετες και διχοτομούνται , συνεπώς αυτό είναι ρόμβος.

iii)

Επειδή οι ΑΕ και ΒΕ είναι διχοτόμοι των διαδοχικών γωνιών $\widehat{A}$ και $\hat{B}$ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ , αυτές είναι κάθετες άρα $A\hat{E}B = 90^o$

iv)

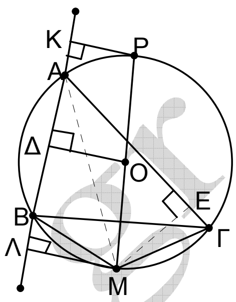
Εύκολα διαπιστώνουμε ότι και η ΓΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$. Συνεπώς όλες οι γωνίες του ΕΜΖΝ είναι ορθές οπότε αυτό είναι ορθογώνιο

34.

Ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο , R) και μία διάμετρος ΡΜ του κύκλου είναι κάθετη στην πλευρά ΒΓ (το Ρ είναι στο τόξο $\overset{\frown}{ΒΑΓ}$). Έστω ότι Κ και Λ είναι οι προβολές των Ρ και Μ αντίστοιχα πάνω στην ευθεία ΑΒ. Να δείξετε ότι

i) ΑΚ =ΒΛ
ii) $ΑΛ - ΑΚ = ΑΒ$
iii) $ΑΚ + ΑΛ = ΑΓ$

Προτεινόμενη λύση



i)
Έστω Κ και Λ οι προβολές των Ρ και Μ στην ευθεία ΑΒ.
Φέρω το απόστημα ΟΔ της χορδής ΑΒ.
Τότε ΔΑ = ΔΒ **(1)** και ΡΚ // ΟΔ //ΜΛ σαν κάθετα τμήματα στην ίδια ευθεία
Το τετράπλευρο ΡΚΛΜ είναι τραπέζιο και αφού Ο το μέσο της ΡΜ και ΟΔ // ΡΚ //ΜΛ,
η ΟΔ είναι διάμεσος του τραπεζίου , άρα ΔΚ = ΔΛ **(2)**
Αφαιρώντας από την (2) την (1) έχουμε $ΔΚ - ΔΑ = ΔΛ - ΔΒ \Leftrightarrow ΚΑ = ΒΛ$

ii)
$ΑΛ - ΑΚ =$ λόγω του (i) $= ΑΛ - ΒΛ = ΑΒ$

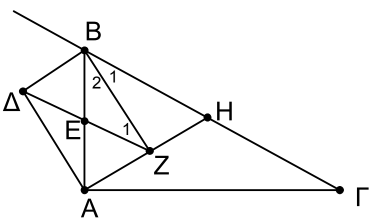
iii)
Φέρω το $ΜΕ \perp ΑΓ$. Τότε τα τρίγωνα ΑΜΛ και ΑΜΕ είναι ίσα διότι είναι ορθογώνια , έχουν την ΑΜ κοινή και $Λ\hat{Α}Μ = Μ\hat{Α}Ε$ δεδομένου ότι το Μ είναι το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{ΒΜΓ}$. Άρα ΑΛ = ΑΕ **(3)**
Επίσης τα τρίγωνα ΒΜΛ και ΜΕΓ είναι ίσα διότι είναι ορθογώνια με ΜΒ = ΜΓ και ΜΛ = ΜΕ (το Μ ισαπέχει από τις ΑΒ , ΑΓ αφού η ΑΜ είναι διχοτόμος της $Β\hat{Α}Γ$.
Άρα ΒΛ= ΕΓ **(4)**
Από (i) , (3) και (4) έχουμε $ΑΚ + ΑΛ = ΒΛ + ΑΕ = ΕΓ + ΑΕ = ΑΓ$

35.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η υποτείνουσα ΒΓ είναι διπλάσια από την ΑΒ. Από το Α φέρνουμε τις κάθετες ΑΖ και ΑΔ στην εσωτερική και την εξωτερική διχοτόμο της γωνίας $\hat{Β}$. Η ΑΖ προεκτεινόμενη τέμνει την ΒΓ στο Η. Δείξτε ότι

i) ΔΖ // ΒΓ
ii) Ζ μέσο της ΑΗ και Η μέσο της ΒΓ
iii) $ΔΖ = \frac{ΒΓ}{2}$

Προτεινόμενη λύση



i)
Επειδή οι ΒΔ και ΒΖ είναι διχοτόμοι εφεξής παραπληρωματικών γωνιών θα είναι $Δ\hat{Β}Ζ = 90^o$
Στο τετράπλευρο ΔΒΖΑ έχουμε $Δ\hat{Β}Ζ = 90^o$,

$B\hat{\Delta}A = 90^o$ και $A\hat{Z}B = 90^o$, άρα αυτό είναι ορθογώνιο , οπότε $AB = \Delta Z$,
επομένως και $BE = EZ \Leftrightarrow \hat{Z}_1 = \hat{B}_2$
Αφού όμως είναι και $\hat{B}_2 = \hat{B}_1$ θα είναι και $\hat{Z}_1 = \hat{B}_1$, άρα $\Delta Z \mathbin{//} B\Gamma$

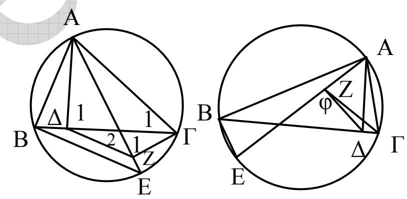
ii)
Το Ε είναι μέσο του ΑΒ και ΕΖ// ΒΗ, άρα το Ζ είναι μέσο του ΑΗ
Επίσης στο τρίγωνο ΒΑΗ, το ΒΖ είναι διχοτόμος και ύψος άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές , επομένως ΒΗ = ΒΑ = από την υπόθεση $= \frac{B\Gamma}{2}$, άρα Η μέσο του ΒΓ

iii)
Από υπόθεση έχουμε ότι $AB = \frac{B\Gamma}{2}$ και επειδή $\Delta Z = AB$ θα είναι και $\Delta Z = \frac{B\Gamma}{2}$

36.
Τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο , ΑΔ ύψος αυτού και ΑΕ διάμετρος του κύκλου. Από το Γ φέρνουμε τμήμα $\Gamma Z \perp AE$. Να αποδείξετε ότι
i) Τα σημεία Α, Δ , Ζ , Γ είναι ομοκυκλικά
ii) ΖΔ // ΒΕ
iii) $Z\Delta \perp AB$

Προτεινόμενη λύση

i)
Και στα δύο σχήματα είναι
$A\hat{\Delta}\Gamma = 90^o = A\hat{Z}\Gamma$ οπότε τα τετράπλευρα ΑΔΖΓ στο αριστερά σχήμα και ΑΖΔΓ στο δεξιά είναι εγγράψιμα σε κύκλο , δηλαδή τα σημεία Α, Δ, Ζ και Γ είναι ομοκυκλικά



ii)
Στο αριστερά σχήμα , από το εγγράψιμο ΑΔΖΓ έχουμε ότι $\hat{\Gamma}_1 = \hat{Z}_2$. Όμως $\hat{\Gamma}_1 = A\hat{E}B$ σαν εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο , άρα $\hat{Z}_2 = A\hat{E}B$ οπότε ΔΖ// ΒΕ
Στο δεξιά σχήμα , από το εγγράψιμο ΑΖΔΓ έχουμε ότι $A\hat{\Gamma}B = \hat{\varphi}$ αλλά και $A\hat{\Gamma}B = B\hat{E}A$ σαν εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο , οπότε $\hat{\varphi} = B\hat{E}A$ επομένως ΔΖ // ΒΕ

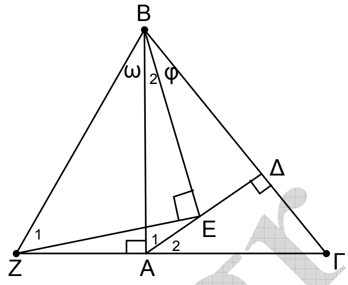
iii)
Επειδή η γωνία $A\hat{B}E$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο , αυτή είναι ορθή , συνεπώς $BE \perp AB$, επομένως και η παράλληλη ΔΖ της ΒΕ θα είναι κάθετη στην ΑΒ

37.

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ το ύψος στην υποτείνουσα ΒΓ. Αν Ε τυχαίο σημείο του ύψους ΑΔ και η κάθετη στην ΒΕ στο Ε τέμνει την προέκταση της ΓΑ στο Ζ , να αποδείξετε ότι

i) $\hat{Z}_1 = \hat{\Gamma}$

ii) $A\hat{B}Z = E\hat{B}\Gamma$



Προτεινόμενη λύση

i)

Επειδή $B\hat{E}Z = B\hat{A}Z = 90^o$, το τετράπλευρο ΒΕΑΖ είναι εγγράψιμο άρα $\hat{Z}_1 = \hat{A}_1$

Επίσης $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ σαν συμπληρωματικές της $\hat{A}_2$

οπότε $\hat{Z}_1 = \hat{\Gamma}$.

ii)

Είναι $\hat{\omega} + \hat{B}_2 + \hat{Z}_1 = 90^o$ και $\hat{\varphi} + \hat{B}_2 + \hat{\Gamma} = 90^o$ άρα $\hat{\omega} + \hat{B}_2 + \hat{Z}_1 = \hat{\varphi} + \hat{B}_2 + \hat{\Gamma}$

Και δεδομένου ότι $\hat{Z}_1 = \hat{\Gamma}$, έχουμε $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ δηλαδή $A\hat{B}Z = E\hat{B}\Gamma$

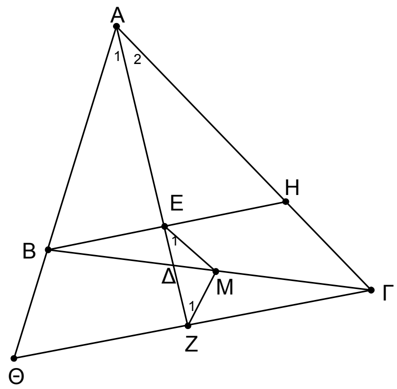
38.

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ και η διχοτόμος ΑΔ αυτού. Από το Β φέρνουμε κάθετο στην ΑΔ που τέμνει την ΑΔ στο Ε και την ΑΓ στο Η, και από το Γ φέρνουμε κάθετο στην ΑΔ που τέμνει την ΑΔ στο Ζ και την προέκταση της ΑΒ στο Θ. Ακόμα έστω Μ το μέσο της ΒΓ . Να αποδείξετε ότι

i) Το τρίγωνο ΕΜΖ είναι ισοσκελές

ii) $E\widehat{M}Z = \hat{B} + \hat{\Gamma}$

iii) Το τετράπλευρο ΒΗΓΘ είναι ισοσκελές τραπέζιο



Προτεινόμενη λύση

i)

Στο τρίγωνο ΑΒΗ η ΑΕ είναι διχοτόμος και ύψος , συνεπώς το τρίγωνο είναι ισοσκελές και το Ε είναι μέσο του ΒΗ

Στο τρίγωνο ΒΗΓ τα Ε και Μ είναι μέσα των ΒΗ και ΒΓ άρα ΕΜ // ΗΓ δηλαδή ΕΜ // ΑΓ οπότε

$\hat{E}_1 = \hat{A}_2$ **(1)** ως εντός εκτός των παραλλήλων ΕΜ και ΑΓ με τέμνουσα την ΑΓ

Ομοίως το τρίγωνο ΑΘΓ είναι ισοσκελές και Ζ μέσο της ΘΓ, οπότε ΜΖ // ΒΘ δηλαδή ΜΖ // ΑΘ, άρα $\hat{Z}_1 = \hat{A}_1$ **(2)** ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΘ και ΜΖ με τέμνουσα την ΑΖ.

Όμως $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \dfrac{\hat{A}}{2}$, άρα από τις (1) και (2) έχουμε ότι $\hat{E}_1 = \hat{Z}_1 = \dfrac{\hat{A}}{2}$, επομένως το τρίγωνο ΕΜΖ είναι ισοσκελές

ii)

$$E\widehat{M}Z = 180^o - \hat{E}_1 - \hat{Z}_1 = 180^o - \frac{\hat{A}}{2} - \frac{\hat{A}}{2} = 180^o - \hat{A} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$$

iii)

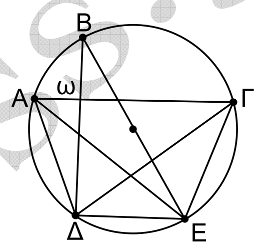
ΒΗ // ΓΘ σαν κάθετα στην ΑΔ , επομένως το ΒΗΓΘ είναι τραπέζιο.
Και επειδή ΒΘ = ΗΓ σαν διαφορές των ίσων τμημάτων ΑΓ = ΑΘ και ΑΗ = ΑΒ, το τραπέζιο είναι ισοσκελές .

39.

Σε κύκλο (Ο , R) δίνονται τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ και Δ έτσι ώστε $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 180^o$ και ΒΕ διάμετρος του κύκλου. Να αποδείξετε ότι

i) Οι χορδές ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες
ii) ΑΓ // ΔΕ
iii) ΑΕ = ΓΔ

Προτεινόμενη λύση



i)

Αν $\hat{\omega}$ είναι η γωνία των δύο χορδών, γνωρίζουμε ότι το μέτρο της είναι ίσο με

$$\hat{\omega} = \frac{1}{2}[\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta}] = \frac{1}{2}\cdot 180^o = 90^o$$

Άρα $A\Gamma \perp B\Delta$

ii)

Επειδή ΒΕ διάμετρος θα είναι $B\hat{\Delta}E = 90^o$, επομένως $\Delta E \perp B\Delta$.
Αφού λοιπόν $A\Gamma \perp B\Delta$ και $\Delta E \perp B\Delta$ θα είναι ΑΓ // ΔΕ

iii)

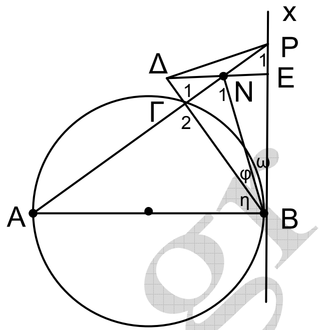
Επειδή ΑΓ // ΔΕ , είναι $\overset{\frown}{A\Delta} = \overset{\frown}{\Gamma E} \Leftrightarrow A\Delta = \Gamma E$, άρα το τετράπλευρο ΑΔΕΓ είναι τραπέζιο και μάλιστα ισοσκελές , οπότε οι διαγώνιες του είναι Ίσες , δηλαδή ΓΔ = ΑΕ

40 .

Θεωρούμε κύκλο (Ο, R) μία διάμετρο ΑΒ αυτού, την εφαπτομένη στο Β και ένα σημείο Γ του κύκλου. Η ΑΓ τέμνει την εφαπτομένη στο Ρ, και πάνω στην ΒΓ παίρνουμε τμήμα ΒΔ = ΒΡ. Αν η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει την ΑΡ στο Ν, να αποδείξετε ότι

i) Η ΒΝ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{B}P$

ii) ΑΝ = ΑΒ



Προτεινόμενη λύση

i)

Επειδή η ΑΒ είναι διάμετρος , η γωνία $\hat{\Gamma}_2$ είναι ορθή , οπότε το ΡΓ είναι ύψος στο τρίγωνο ΒΔΡ. Ακόμα $AB \perp Bx$ και έστω ότι το ΔΝ τέμνει την Βx στο Ε . Αφού ΔΝ //ΑΒ , θα είναι και $\Delta N \perp Bx$, οπότε το ΔΕ είναι το δεύτερο ύψος του τριγώνου ΔΒΡ, συνεπώς το Ν είναι το ορθόκεντρο του ισοσκελούς τριγώνου ΒΔΡ. Κατά συνέπεια το ΒΝ θα είναι ο φορέας του τρίτου ύψους του ισοσκελούς τριγώνου ΒΡΔ οπότε η ΒΝ είναι και διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{B}P$

ii)

Η γωνία $\widehat{N_1}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΝΒΡ, άρα $\hat{N}_1 = \hat{P}_1 + \hat{\omega}$ **(1)**

Επίσης $A\hat{B}N = \hat{\eta} + \hat{\varphi}$ **(2)**

Λόγω του (i) $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ **(3)**

$\hat{P}_1 = \hat{\eta}$ σαν συμπληρωματικές της $\hat{A}$ **(4)**

Οπότε από τις (1) , (2) , (3) , (4) έχουμε $\hat{N}_1 = A\hat{B}N$ άρα ΑΝ = ΑΒ .